



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală
Județul Alba, 13 februarie 2015
Clasa a IX-a

Problema 1.

Se consideră numerele reale strict pozitive x, y, z , cu $x \cdot y \cdot z = 8$.

a) Arătați că $\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} \leq x + y + z$.

b) Determinați numerele x, y, z , știind că ele verifică în plus egalitatea

$$\frac{x^2}{y+3z+\sqrt{2x}} + \frac{y^2}{z+3x+\sqrt{2y}} + \frac{z^2}{x+3y+\sqrt{2z}} = \frac{6}{5}.$$

Problema 2.

Să se determine numerele reale strict pozitive a_1, a_2, \dots, a_n , cu $a_1 = 1$, pentru care este adevărată egalitatea:

$$\frac{1}{a_1+a_2} + \frac{1}{a_2+a_3} + \frac{1}{a_3+a_4} + \dots + \frac{1}{a_n+a_{n+1}} = a_{n+1} - 1, (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

Problema 3.

Considerăm patrulaterul $ABCD$. Fie punctele $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CD), Q \in (DA)$ astfel încât $\frac{MA}{MB} = \frac{NB}{NC} = \frac{PC}{PD} = \frac{QD}{QA} = k$ și punctele $R \in (MN), S \in (NP), T \in (PQ), U \in (QM)$ astfel încât $\frac{RM}{RN} = \frac{SN}{SP} = \frac{TP}{TQ} = \frac{UQ}{UM} = l$, unde $k, l \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Să se arate că dacă $RSTU$ este paralelogram, atunci $ABCD$ este paralelogram.

Problema 4.

Considerăm patrulaterul inscriptibil $ABCD$. Fie H, H' ortocentrele triunghiurilor ABD , respectiv ABC și G, G' centrele de greutate ale triunghiurilor HAD , respectiv $H'BC$.

a) Să se exprime vectorul $\overrightarrow{GG'}$ în funcție de vectorii \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{DC} .

b) Dacă $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$, să se arate că patrulaterul $ABCD$ este trapez isoscel.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.